Доверителен интервал за относителен дял. Сравнение на две извадки

Стандартна грешка и интервал за дял, условия за нормалното приближение, необходим обем на извадката, интервал за разликата между две средни и между два дяла

Упражнение 3 · Медицинска статистика · 2026/2027

гл. ас. д-р Костадин Костадинов, д.м.

Катедра по социална медицина и обществено здраве · Медицински университет – Пловдив

Какво ще можете след това упражнение

1. Да изчислявате **стандартна грешка** и **95 % (99 %) доверителен интервал** за относителен дял и да проверявате условията за нормалното приближение.
2. Да представяте интервала за дял в **проценти**, а стандартната грешка и разликата между дялове — в **процентни пунктове**.
3. Да изчислявате **необходимия брой** наблюдения за желана точност.
4. Да сравнявате **две независими извадки**: по припокриване на интервалите и по **доверителния интервал на разликата**.

План на часа (90 мин)

1. Домашна 2: отговори — 5 мин
2. CI за относителен дял — 18 мин
3. Необходим брой наблюдения — 8 мин
4. Сравнение на две извадки — 25 мин
5. Задача в час — 12 мин
6. Текуща проверка (1 т.) — 15 мин

Калкулатор и лист с формули. Междинните стойности **не** се закръгляват.

Домашна 2: отговори

Задача 1 · Дни до възстановяване ($n = 51$)

- $\overline{X} = 426/51 =$ **8,35 дни**; $S =$ **3,32 дни**
- $S_{\overline{X}} = 3{,}322/\sqrt{51} =$ **0,47 дни**
- $\mathrm{df} = 50 \longrightarrow t = 2{,}009$: 95 % CI **[7,42; 9,29] дни**
- $\overline{X} \pm 2S =$ **[1,71; 15,00] дни** — при приблизително нормално разпределение описва около 95 % от **отделните пациенти**; доверителният интервал описва **средната** и е около $\sqrt{51} \approx 7$ пъти по-тесен.

Задача 2 · Ваксинационен обхват (352 / 400)

- $\hat{p} =$ **88,00 %**; $S_p = \sqrt{88 \times 12/400} =$ **1,62 п.п.**
- 352 и 48 наблюдения — приближението е приложимо
- 95 % CI **[84,82; 91,18] %**; 99 % CI **[83,81; 92,19] %**
- Целевите 95 % са **извън** двата интервала: данните сочат обхват под целта.

СЪДЪРЖАНИЕ

1. **Доверителен интервал за относителен дял**
2. Необходим брой наблюдения
3. Сравнение на две извадки по доверителен интервал
4. Задача в час, домашна работа и текуща проверка

Стандартна грешка на относителния дял

$$\hat{p} = \frac{m}{n} \times 100$$

$$S_p = \sqrt{\frac{\hat{p}(100 - \hat{p})}{n}}$$

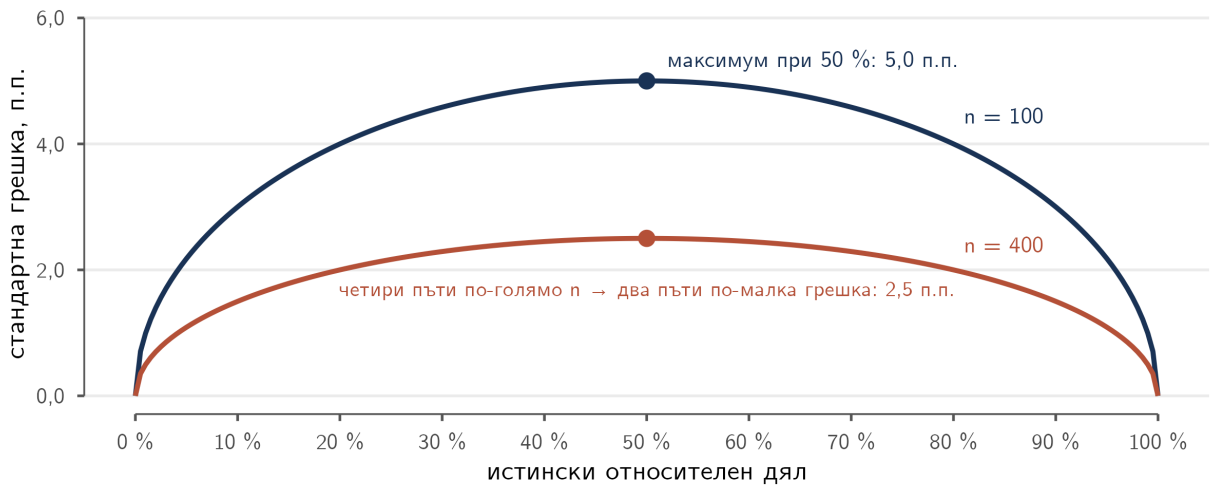
В листа с формули — с дроби: $S_p = \sqrt{p(1-p)/n}$. Резултатът е същият, умножен по 100.

От какво зависи

- от n: 4 пъти повече наблюдения $\longrightarrow$ 2 пъти по-малка грешка
- от самия дял: най-голяма е при **50 %**

Грешката на дяла е най-голяма около 50 %

$\sqrt{(p(100 - p)/n)}$: при същото n абсолютната грешка (в п.п.) е най-малка близо до 0 % и 100 %; при редки събития относителната грешка обаче може да е голяма



Решен пример: посттравматично стресово разстройство

В проспективно проучване на деца след транспортен инцидент ПТСР е установено при **41 от 119** деца. Да се изчисли 95 % CI за популационния дял P.

1. $\hat{p} = 41/119 \times 100 = 34{,}454\%$
2. Проверка: 41 със и 78 без ПТСР — и двата броя са ≥ 10
3. $S_p = \sqrt{34{,}454 \times 65{,}546/119} = 4{,}356$ п.п.
4. $34{,}454 \pm 1{,}96 \times 4{,}356 = 34{,}454 \pm 8{,}538$

95 % CI за P: [25,92; 42,99] %

Заключение

Делът на децата с ПТСР в извадката е 34,45 %. При 95 % доверителност оценяваме популационния дял между **25,92 % и 42,99 %**.

99 % CI

$34{,}454 \pm 2{,}576 \times 4{,}356 =$ **[23,23; 45,68] %** — по-сигурен, но по-широк.

В теста долната граница е 25,91 % — разлика от закръгляне в последния знак.

Тълкуване: въпрос от примерния тест

ПТСР при 41 от 119 деца (34,5 %), 95 % CI за P: 25,91 %; 42,99 %. Кое е вярно?

а) В популацията честотата на ПТСР е по-голяма от 34,5 %.

б) В тази извадка честотата може да приеме стойност между 25,91 % и 42,99 %.

в) Популационната честота е малко вероятно да бъде под 25,91 %.

г) Авторите биха получили по-точна оценка, ако бяха изчислили 99 % CI.

Отговор по ключа на теста: в)

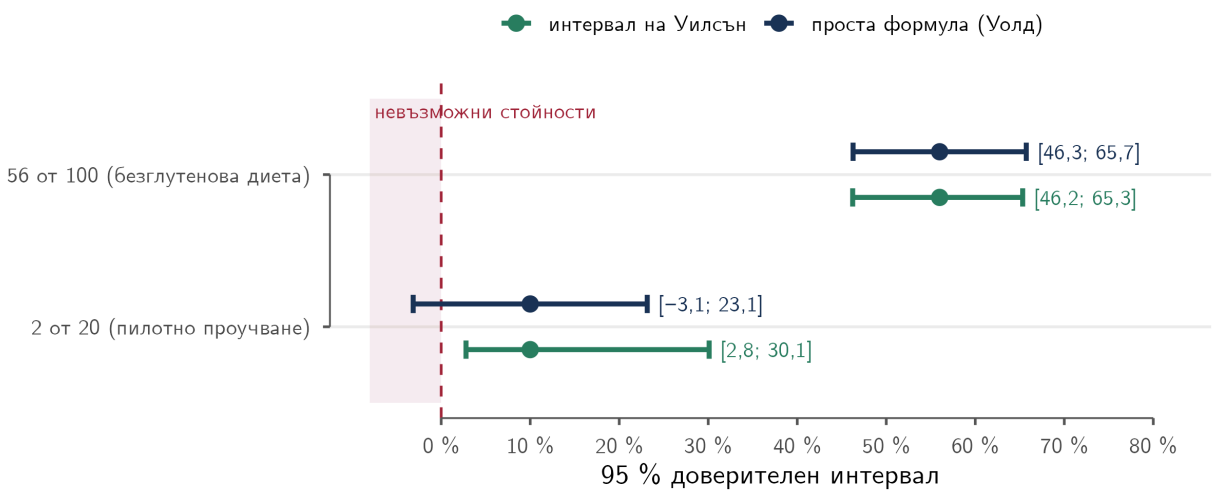
- а) 34,5 % е точкова оценка; P може да е и по-ниско.
- б) в извадката делът е 34,45 % (закръглено 34,5 %); интервалът е за **популацията**.
- г) 99 % интервалът е **по-широк** — по-сигурен, но по-неточен.

По-строга формулировка на в): стойностите под 25,91 % са **извън** получения 95 % интервал. Вероятността 95 % се отнася до метода, не до фиксирания параметър.

Кога простата формула не работи

При малка извадка простата формула се проваля

При 56/100 двата метода почти съвпадат; при 2/20 простата формула дава долна граница под 0 %.



Условие

Броят **със** събитието (m) и броят **без** него $(n-m)$ да са поне **10** (учебник, с. 83 и 87; за разлика — във всяка група). Правилото ≥ 5 от упражнение 2 е по-свободно. И двете са ориентири, не гаранция.

При малки извадки и редки събития

Простата формула дава граници под 0 % или над 100 %. Използва се интервал на **Уилсън** или точен биномен интервал — със софтуер.

Проценти или дроби — но едното навсякъде

	В проценти	С дроби (лист с формули)
дял	$\hat{p} = 34{,}454\%$	$\hat{p} = 0{,}34454$
стандартна грешка	$\sqrt{34{,}454 \times 65{,}546/119} = 4{,}356$ п.п.	$\sqrt{0{,}34454 \times 0{,}65546/119} = 0{,}04356$
95 % CI	**[25,92; 42,99] %**	**[0,2592; 0,4299]**

Грешно

$\sqrt{0{,}345 \times 65{,}5/119}$ — смесени единици; резултатът е безсмислен.

Процентни пунктове

Разликата между два процента (напр. 34 % и 24 %) е **10 процентни пункта**, не „10 %“.

СЪДЪРЖАНИЕ

1. Доверителен интервал за относителен дял
2. **Необходим брой наблюдения**
3. Сравнение на две извадки по доверителен интервал
4. Задача в час, домашна работа и текуща проверка

Колко наблюдения са нужни за желана точност

Качествен признак (дял)

$$n = \frac{Z^2_{\alpha/2} \times p(1-p)}{d^2}$$

Количествен признак

$$n = \frac{Z^2_{\alpha/2} \times S^2}{d^2}$$

d — допустимата грешка (половината ширина на интервала); p и S — от предишни проучвания или пилотно изследване. Формулата е приблизителна и използва Z (t зависи от n, което още не знаем); резултатът е толкова добър, колкото са предварителните стойности.

Примери от учебника (95 %, $Z = 1{,}96$)

- Усложнения ≈ 10 %, $d = 3$ п.п.:
  $n = 1{,}96^2 \times 0{,}10 \times 0{,}90 / 0{,}03^2 = 384{,}16 \longrightarrow$ **385**
- Дялът е неизвестен $\longrightarrow p = 0{,}5$:
  $n = 1{,}96^2 \times 0{,}25 / 0{,}03^2 = 1067{,}1 \longrightarrow$ **1 068**
- Систолно налягане, $S \approx 15$ mmHg, $d = 4$ mmHg:
  $n = 1{,}96^2 \times 15^2 / 4^2 = 54{,}02 \longrightarrow$ **55**

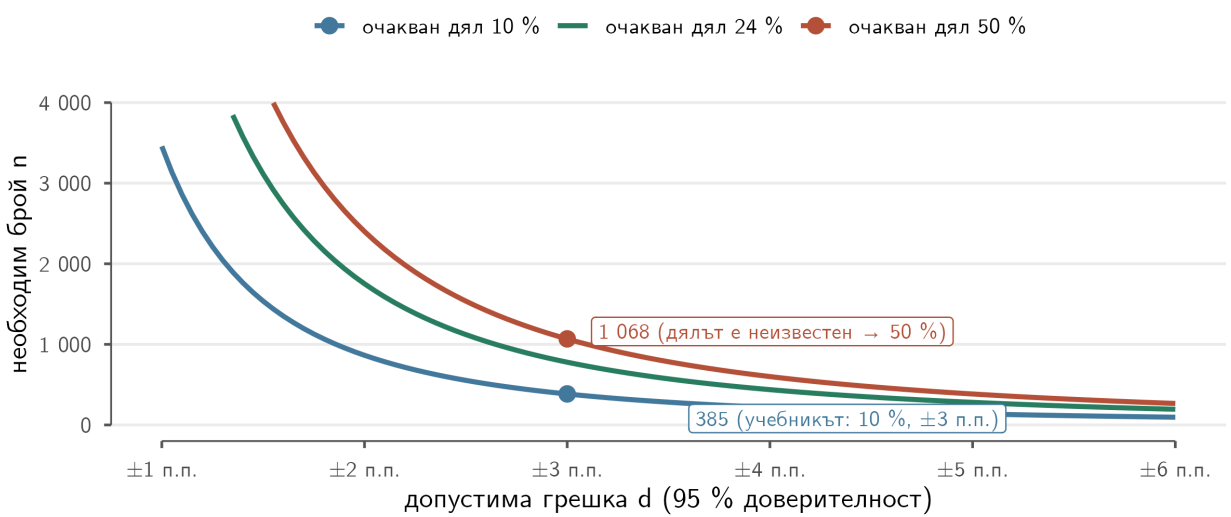
Закръгляване

Винаги **нагоре**, до следващото цяло число: 384 души биха дали точност малко под желаната.

Точността струва скъпо

Двойно по-точна оценка струва четири пъти повече хора

$n = Z^2 \cdot p(1-p)/d^2$; закръгля се винаги нагоре



Допустима грешка (дял ≈ 10 %)	n
± 3 п.п.	385
$\pm 1{,}5$ п.п.	1 537

Два пъти по-малко d ⟶ четири пъти по-голямо n.

Формулите са за оценка на **един** параметър. За сравнение на групи се използват други формули (мощност на теста).

СЪДЪРЖАНИЕ

1. Доверителен интервал за относителен дял
2. Необходим брой наблюдения
3. **Сравнение на две извадки по доверителен интервал**
4. Задача в час, домашна работа и текуща проверка

Два интервала или интервал на разликата

Ориентир: припокриване на два 95 % CI

- **не се припокриват** $\longrightarrow$ разликата почти сигурно е статистически значима
- **припокриват се частично** $\longrightarrow$ не може да се каже; нужна е проверка
- **почти съвпадат** $\longrightarrow$ вероятно няма значима разлика

Двата интервала трябва да са при **едно и също** ниво на доверителност.

Решаващ: CI на разликата

$$(\text{оценка}_1 - \text{оценка}_2) \pm \text{критична стойност} \times \text{SE}_\Delta$$

- **не съдържа 0** $\longrightarrow$ разликата е статистически значима $(\alpha = 0{,}05)$
- **съдържа 0** $\longrightarrow$ не е доказана разлика

Внимание

Припокриването **не доказва**, че разлика няма.

Стандартна грешка на разликата

Две средни

$$\mathrm{SE}_\Delta = \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}} = \sqrt{S_{\overline{X}_1}^2 + S_{\overline{X}_2}^2}$$

$$CI = \left(\overline{X}_1 - \overline{X}_2\right) \pm t_{\alpha/2,\,\mathrm{df}} \times \mathrm{SE}_\Delta$$

$\mathrm{df} \approx \min(n_1 - 1, n_2 - 1)$ — консервативен избор за ръчно пресмятане (както при t-теста в листа)

Два дяла (в проценти)

$$\mathrm{SE}_\Delta = \sqrt{\frac{\hat{p}_1(100 - \hat{p}_1)}{n_1} + \frac{\hat{p}_2(100 - \hat{p}_2)}{n_2}}$$

$$CI = (\hat{p}_1 - \hat{p}_2) \pm Z_{\alpha/2} \times \mathrm{SE}_\Delta$$

Събират се квадратите на грешките, после се коренува: $\mathrm{SE}_\Delta < S_{\overline{X}_1} + S_{\overline{X}_2}$.

Затова два интервала могат да се припокриват, а интервалът на разликата да не съдържа 0.

Учебникът допуска и $\mathrm{df} = n_1 + n_2 - 2$ при сходни обеми и разсейване. Софтуерът използва df по Уелч–Сатъртуейт; при гранични резултати изборът на df може да промени извода.

В листа няма формули за CI на разликата. SE за две средни е знаменателят на t-теста; за CI на два дяла SE се смята с **отделните** дялове (не с обединения от Z-теста).

Решен пример: безглутенова диета (56/100 срещу 45/100)

Група	$\hat{p}$	S_p	95 % CI
безглутенова	56 %	4,964	[46,27; 65,73] %
контролна	45 %	4,975	[35,25; 54,75] %

1. Разлика: $56 - 45 = 11$ п.п.
2. $\mathrm{SE}_\Delta = \sqrt{56 \times 44/100 + 45 \times 55/100} = \sqrt{49{,}39} = 7{,}028$
3. $11 \pm 1{,}96 \times 7{,}028 = 11 \pm 13{,}77$

95 % CI на разликата: [–2,77; 24,77] п.п. — съдържа 0

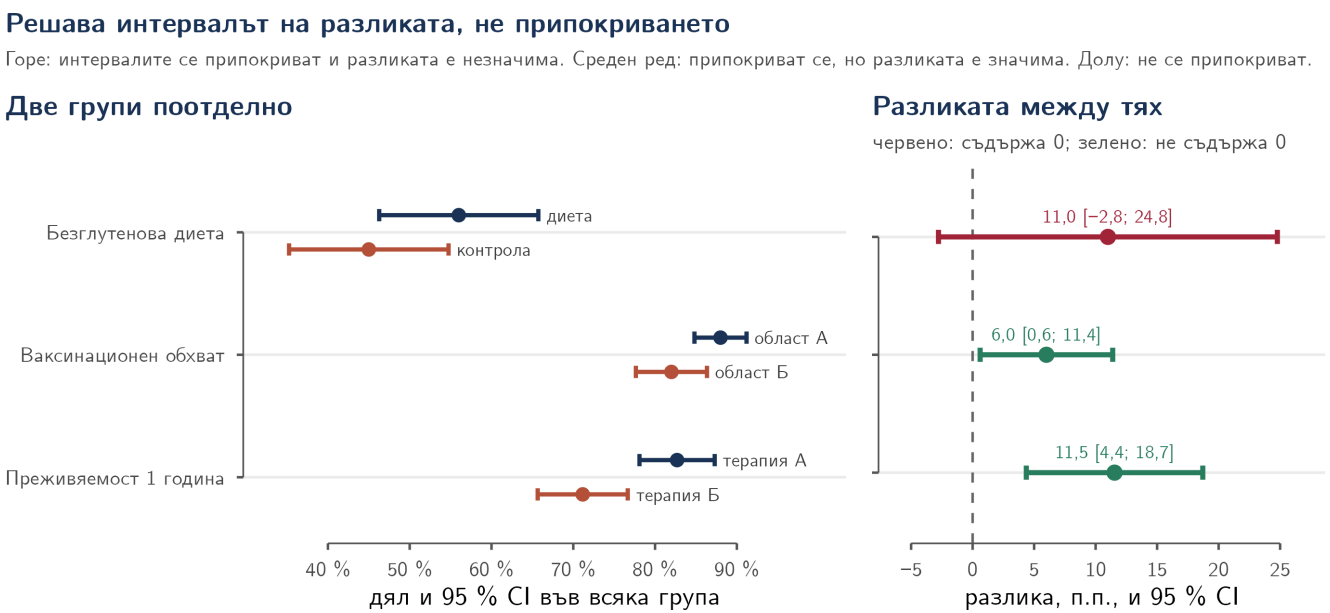
Заключение

Подобрението е с 11 п.п. по-често при безглутенова диета, но интервалът на разликата съдържа 0: разликата **не е статистически значима** при $\alpha = 0{,}05$.

Не казваме

„Диетата няма ефект.“ Интервалът допуска както липса на ефект, така и ефект до около 25 п.п. — изследването е **малко**.

Припокриването може да подведе



Горе: 56/100 срещу 45/100. Среда: 352/400 срещу 246/300 (задачата в час). Долу: едногодишна преживяемост 215/260 срещу 185/260 (учебник, гл. 6).

Решен пример: преживяемост без прогресия при две терапии

Терапия	n	$\overline{X}$, мес.	S	$S_{\overline{X}}$
А	40	16,10	7,63	1,206
Б	40	12,84	5,25	0,830

1. $\overline{X}_1 - \overline{X}_2 = 16{,}10 - 12{,}84 = 3{,}26$ месеца
2. $\mathrm{SE}_\Delta = \sqrt{7{,}63^2/40 + 5{,}25^2/40} = 1{,}464$
3. $\mathrm{df} = \min(39; 39) = 39 \longrightarrow$ в таблицата няма ред 39 $\longrightarrow$ ред 30: $t = 2{,}042$
4. $3{,}26 \pm 2{,}042 \times 1{,}464 = 3{,}26 \pm 2{,}99$

95 % CI на разликата: [0,27; 6,25] месеца — не съдържа 0

Заключение

Средната преживяемост без прогресия е с 3,26 месеца по-дълга при терапия А; разликата е **статистически значима** ($\alpha = 0{,}05$).

Поотделно

А: [13,64; 18,56]; Б: [11,14; 14,54] месеца — **припокриват се**.

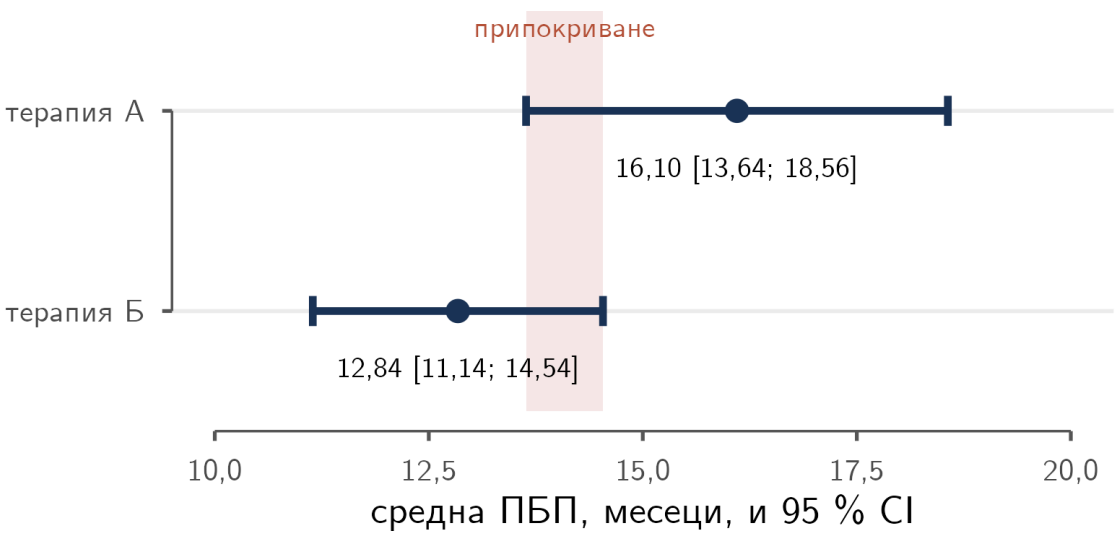
Учебникът: $\mathrm{df} = 78$, $t = 1{,}99 \longrightarrow$ [0,35; 6,17]. Същият извод.

Една и съща информация, два погледа

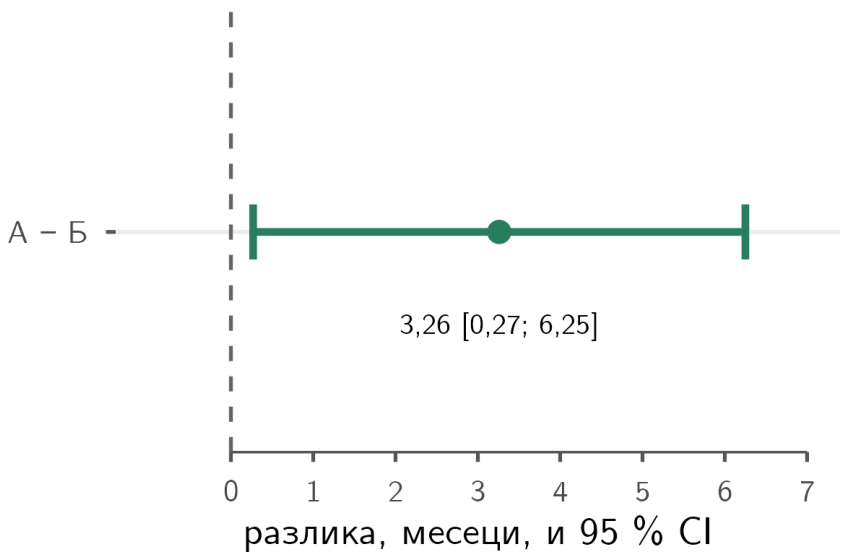
Интервалите се припокриват, а разликата е статистически значима

Пример от учебника: n = 40 във всяка група; t от листа с формули при df = 39 → ред 30: 2,042

Групите поотделно



Разликата



Интервалите на групите отговарят на въпроса „колко точно знаем всяка средна“; интервалът на разликата — „колко се различават и дали разликата може да е 0“.

Решен пример: нежелани реакции (учебник)

Терапия А: **35 от 160** ($\hat{p}_1 = 21{,}875\%$); терапия Б: **35 от 150** ($\hat{p}_2 = 23{,}333\%$).

1. Разлика: $21{,}875 - 23{,}333 = -1{,}458$ п.п.
2. $\mathrm{SE}_\Delta = \sqrt{21{,}875 \times 78{,}125/160 + 23{,}333 \times 76{,}667/150} = 4{,}755$
3. $-1{,}458 \pm 1{,}96 \times 4{,}755 = -1{,}458 \pm 9{,}319$

95 % CI: [–10,78; 7,86] п.п. — съдържа 0

Заключение

Нежеланите реакции са с 1,46 п.п. по-редки при терапия А, но разликата **не е статистически значима**. Данните са съвместими с разлика от около 11 п.п. в полза на А до около 8 п.п. в полза на Б.

Условие: 35 и 125, 35 и 115 — всички ≥ 10.

Чести грешки

Грешка	**Правилно**
„интервалите се припокриват ⟶ няма разлика“	решава **интервалът на разликата**
$\mathrm{SE}_\Delta = S_{\overline{X}_1} + S_{\overline{X}_2}$	събират се **квадратите**: $\sqrt{S^2_{\overline{X}_1} + S^2_{\overline{X}_2}}$
„разликата е 11 %“	**11 процентни пункта**
CI на разликата съдържа 0 ⟶ „доказахме, че няма ефект“	„не е установена статистически значима разлика“
сравнение на 95 % CI с 99 % CI	едно и също ниво за двете групи
простата формула при 2 от 20	проверете условието; интервал на Уилсън
необходим брой 384,16 ⟶ 384	закръгляване **нагоре**: 385

СЪДЪРЖАНИЕ

1. Доверителен интервал за относителен дял
2. Необходим брой наблюдения
3. Сравнение на две извадки по доверителен интервал
4. **Задача в час, домашна работа и текуща проверка**

Задача в час: ваксинационен обхват в две области

Случайни извадки от деца на 2 години:

- област А: **352 от 400** напълно ваксинирани
- област Б: **246 от 300** напълно ваксинирани

1. Изчислете дела и 95 % CI във всяка област.
2. Припокриват ли се интервалите? Какво **може** и какво **не може** да се заключи от това?
3. Изчислете 95 % CI на разликата А – Б и формулирайте заключение.

Подсказки

- проверете условието: брой със и без събитието
- $\mathrm{SE}_{\Delta} = \sqrt{S_{p1}^2 + S_{p2}^2}$
- работете в проценти

Решение

Област	$\hat{p}$	S_p	95 % CI
А	88 %	1,625	[84,82; 91,18] %
Б	82 %	2,218	[77,65; 86,35] %

- Интервалите **се припокриват** (84,82–86,35) $\longrightarrow$ само по тях не може да се реши.
- Разлика: $88 - 82 = 6$ п.п.
- $\mathrm{SE}_\Delta = \sqrt{2{,}64 + 4{,}92} = \sqrt{7{,}56} = 2{,}750$
- $6 \pm 1{,}96 \times 2{,}750 = 6 \pm 5{,}39$

95 % CI на разликата: [0,61; 11,39] п.п. — не съдържа 0

Заключение

Обхватът в област А е с 6 п.п. по-висок; разликата е статистически значима, макар двата интервала да се припокриват.

Обобщение и домашна работа

Да запомним

1. $S_p = \sqrt{\hat{p}(100 - \hat{p})/n}$; условие: поне 10 със и 10 без събитието.
2. Проценти **или** дроби — навсякъде еднакво; разлика в **п.п.**
3. Необходим брой: $Z^2 p(1-p)/d^2$; закръгляване нагоре.
4. Две групи: решава **CI на разликата**; съдържа ли 0?
5. Припокриване ≠ липса на разлика.

Домашна работа

Три задачи — на сайта, „Медицинска статистика“: **kostadinoff.github.io**

- Задача 1: наднормено тегло при ученици (CI за дял, необходим брой)
- Задача 2: систолно налягане в две програми (CI за разлика на средни)
- Задача 3: тютюнопушене в I и VI курс (CI за разлика на дялове)

Следващия път: **t-тест и Z-тест**. В края — текуща проверка (1 т.) по **CI за дял и сравнение по CI**.

Текуща проверка (1 точка): дескриптивна статистика и CI за средна

Правила

- **15 минути**, самостоятелно
- един казус на човек; съседите имат **различни** варианти
- позволени: калкулатор и лист с формули
- напишете име, факултетен номер и група

Какво се оценява

1. средна аритметична и медиана
2. стандартно отклонение (с таблица на отклоненията)
3. стандартна грешка
4. 95 % CI с правилната критична стойност
5. **заключение с изречение** и мерна единица

Благодаря за вниманието!