χ^2-тест за независимост. Правило на трите сигми

Кръстосани таблици, наблюдавани и очаквани честоти, степени на свобода, критична стойност и p-стойност; условия, малки очаквани честоти и точен тест на Fisher; сила на връзката (φ, V на Cramer); правило на трите сигми

Упражнение 5 · Медицинска статистика · 2026/2027

гл. ас. д-р Костадин Костадинов, д.м.

Катедра по социална медицина и обществено здраве · Медицински университет – Пловдив

Какво ще можете след това упражнение

1. Да разпознавате кога връзката между две **качествени** променливи се проверява с χ^2-тест.
2. Да изчислявате **очакваните честоти**, χ^2 и **степените на свобода** и да определяте p-стойността от листа с формули.
3. Да проверявате **условията** и да знаете какво се прави при малки очаквани честоти.
4. Да оценявате **силата на връзката** (φ, V на Cramer) и да формулирате извода без причинно-следствени твърдения.
5. Да прилагате **правилото на трите сигми** при нормално разпределена променлива.

План на часа (90 мин)

1. Домашна 4: отговори — 5 мин
2. Логика на χ^2-теста — 12 мин
3. Таблици 2×2 и r×c — 23 мин
4. Условия, сила, извод — 10 мин
5. Правило на трите сигми — 12 мин
6. Задачи в час — 13 мин
7. Текуща проверка (1 т.) — 15 мин

Калкулатор и лист с формули. По учебника: $\alpha = 0{,}05$.

Домашна 4: отговори

1 · Едногодишна преживяемост (250/300 срещу 190/300)

- $\hat{p} = 73{,}33\%$; $Z = 20/3{,}611 = 5{,}54 \longrightarrow$ **p < 0,01**
- 95 % CI на разликата **[13,11; 26,89] п.п.** — значима разлика от 20 п.п.

2 · Предпочитание към нова форма (171/300)

- $S_0 = \sqrt{50 \times 50/300} = 2{,}887$ (с P_0!); $Z = 7/2{,}887 = 2{,}42$
- $1{,}96 < 2{,}42 < 2{,}576 \longrightarrow$ **0,01 < p < 0,05** — делът 57 % е значимо над 50 %

3 · ИТМ при спортуващи и неспортуващи

- $\mathrm{SE} = 1{,}382$; $t = -1{,}81$; $\mathrm{df} = \min(31; 34) = 31 \longrightarrow$ ред 30
- $1{,}697 < 1{,}81 < 2{,}042 \longrightarrow$ **0,05 < p < 0,10**; CI **[–5,32; 0,32]** kg/m² — не е значима

4 · Кръвна захар преди и след (10 пациенти)

- $\bar{d} = -0{,}52$; $S_d = 0{,}305$; $t = -5{,}40$; $\mathrm{df} = 9$
- $5{,}40 > 3{,}250 \longrightarrow$ **p < 0,01**; CI на средната разлика **[–0,74; –0,30]** mmol/L

Честа грешка в 4: t-тест за независими извадки ($|t| \approx 1{,}88$, незначим) — свързаните данни се анализират чрез разликите.

СЪДЪРЖАНИЕ

1. **Логика на χ^2-теста**
2. Таблица 2 × 2
3. Таблица r × c
4. Условия, малки очаквани честоти, сила и извод
5. Задачи в час, домашна работа и текуща проверка

Кога използваме χ^2-тест за независимост

Въпрос

Свързани ли са две **качествени** (категорийни) променливи? Например пол и придържане към терапията, тютюнопушене и миокарден инфаркт, тютюнопушене и рак на белия дроб, вид обучение и контрол на диабета.

Данни: кръстосана таблица r × c

В редовете — категориите на едната променлива, в колоните — на другата. Във всяка клетка стои **броят** наблюдения с тази комбинация. Всеки човек попада **точно в една** клетка.

Учебник, с. 101 и 123: тестът „проверява дали разпределението на едната променлива е еднакво във всички категории на другата“ и не оценява посоката на връзката.

Тест	Таблица	Условие (учебник, табл. 20)
χ^2-тест за независимост	произволна r × c	≥ 80 % от очакваните честоти ≥ 5; няма очаквана < 1
точен тест на Fisher	2 × 2 (и r × c със софтуер)	малки извадки; очаквана честота < 5
Z-тест за два дяла	2 × 2	≥ 10 със и ≥ 10 без събитието във всяка група

χ^2-тестът работи с **честоти**, не със средни, и не изисква нормално разпределение — учебникът го причислява към непараметричните тестове.

Хипотези: какво означава „независимост“

Нулева хипотеза H_0 (работна)

Двете променливи са **независими** в популацията: разпределението на едната е еднакво при всички категории на другата.
При 2×2: делът със събитието е еднакъв в двете групи, $P_1 = P_2$.

Алтернативна хипотеза H_1

Двете променливи са свързани (зависими) в популацията: поне в една категория разпределението се различава.

χ^2-тестът винаги е за H_1 „има някаква връзка“, без посока. Посоката се вижда от процентите по редове.

Неправилни формулировки

- H_1: „Има **статистически значима** връзка...“ — значимостта е изход от теста, не свойство на популацията.
- „Честотата на лечението **е фактор** / **оказва влияние** върху...“ — χ^2 установява връзка, не причина.
- „Приемаме H_0.“

Правилно

H_0: няма връзка между тютюнопушенето и миокардния инфаркт (делът с инфаркт е еднакъв при пушачи и непушачи).
H_1: има връзка (делът е различен).

Наблюдавани и очаквани честоти

O — наблюдаваните честоти (фактите в таблицата).

E — очакваните честоти: броевете, които бихме получили, **ако H_0 е вярна**.

$$E_{ij} = \frac{R_i \times C_j}{n}$$

R_i — сбор на реда; C_j — сбор на колоната; n — общ брой.

Защо точно така?

Ако няма връзка, делът със събитието във всеки ред е равен на общия дял C_j/n. Тогава в ред i очакваме $R_i \times C_j/n$ души.

Пушене и миокарден инфаркт, n = 500

Общо 51 от 500 (**10,2 %**) получават инфаркт. Ако няма връзка — по 10,2 % и при пушачите, и при непушачите:

- пушачи: $200 \times 51/500 = 20{,}4$
- непушачи: $300 \times 51/500 = 30{,}6$
- без инфаркт: $200 - 20{,}4 = 179{,}6$ и $300 - 30{,}6 = 269{,}4$

Очакваните честоти не е нужно да са цели числа — **не ги закръгляйте**. Сборовете им по редове и колони съвпадат с тези на наблюдаваните. При 2×2 е достатъчно да изчислим една клетка; останалите — чрез разлика.

Тестовата статистика χ^2 и степените на свобода

$$\chi^2 = \sum \frac{(O_{ij} - E_{ij})^2}{E_{ij}}$$

$$\mathrm{df} = (R-1) \times (C-1)$$

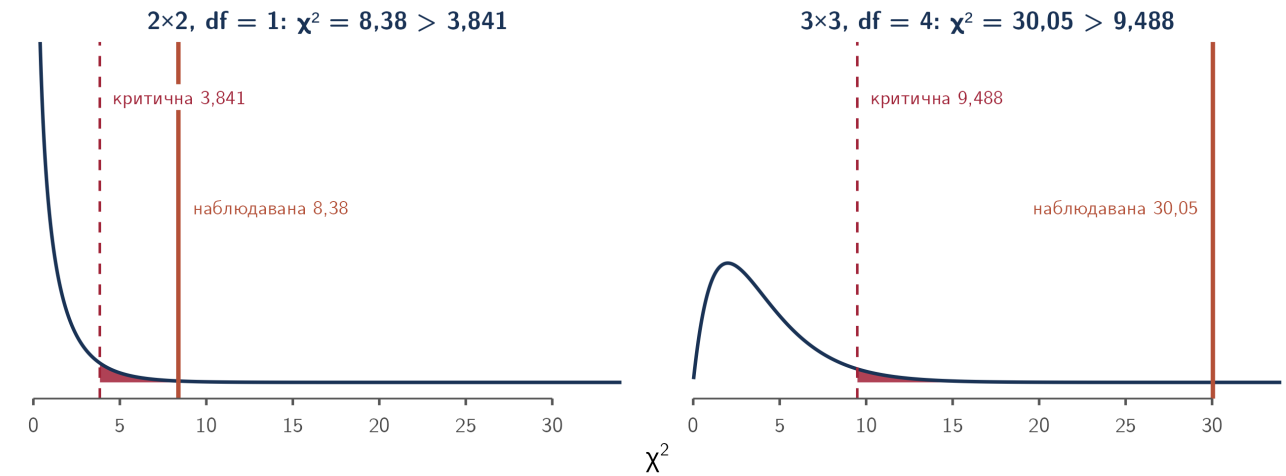
Сумира се по **всички** клетки. Колкото по-далеч са фактите от очакванията, толкова по-голямо е χ^2 и толкова по-малка е p-стойността. $\chi^2 \geq 0$; отхвърляме H_0 при $\chi^2 > \chi^2_{\text{кр}}$.

df	$\chi^2_{0,10}$	$\chi^2_{0,05}$	$\chi^2_{0,01}$
1	2,706	3,841	6,635
2	4,605	5,991	9,210
3	6,251	7,815	11,345
4	7,779	9,488	13,277

От листа с формули. Индексът на колоната е α: при $\chi^2 > 3{,}841$ (df $= 1$) $\longrightarrow p < 0{,}05$.

$\chi^2 \geq 0$; отхвърляме H_0 само в дясната опашка

Червено: областта на отхвърляне при $\alpha = 0{,}05$. Колкото повече df, толкова по-надясно е критичната стойност



СЪДЪРЖАНИЕ

1. Логика на χ^2-теста
2. **Таблица 2 × 2**
3. Таблица r × c
4. Условия, малки очаквани честоти, сила и извод
5. Задачи в час, домашна работа и текуща проверка

Пример 2×2: тютюнопушене и миокарден инфаркт

Кохортно проучване: 500 мъже на 50–64 години без сърдечно-съдово заболяване, проследени 10 години. Има ли връзка между тютюнопушенето в началото и миокардния инфаркт?

Наблюдавани честоти O

	инфаркт	**без**	**общо**
пушачи	30 (15 %)	170	200
непушачи	21 (7 %)	279	300
общо	51 (10,2 %)	449	500

Очаквани честоти E (ако H_0 е вярна)

	инфаркт	**без**	**общо**
пушачи	20,4	179,6	200
непушачи	30,6	269,4	300
общо	51	449	500

1. H_0: няма връзка (делът с инфаркт е еднакъв); H_1: има връзка; $\alpha = 0{,}05$.
2. Условие: всички E ≥ 5 (най-малката е 20,4) ✓.

Пример 2×2: изчисление и извод

3. $\chi^2 = 9{,}6^2/20{,}4 + 9{,}6^2/179{,}6 + 9{,}6^2/30{,}6 + 9{,}6^2/269{,}4$
   (всяка разлика $|O-E| = |30-20{,}4| = 9{,}6$)
   $= 4{,}5176 + 0{,}5131 + 3{,}0118 + 0{,}3421 = 8{,}38$
4. $\mathrm{df} = (2-1)(2-1) = 1$; $8{,}38 > 6{,}635 \rightarrow$ **$p < 0{,}01$**
   (софтуер: 0,004)
5. Сила: $\varphi = \sqrt{\chi^2/n} = \sqrt{8{,}38/500} = 0{,}13$ — слаба връзка (учебник, табл. 24)

При 2×2 разликата $O-E$ е еднаква по абсолютна стойност във всички клетки (тук 9,6) — удобна проверка.

$p < 0{,}01$: отхвърляме H_0. Има статистически значима връзка между тютюнопушенето и миокардния инфаркт: инфаркт получават 15 % от пушачите и 7 % от непушачите (разлика 8 п.п.). Връзката е слаба ($\varphi = 0{,}13$).

Не пишем

„Пушенето **причинява** инфаркт“ въз основа на тази таблица — проучването е наблюдателно; възрастта, артериалното налягане, холестеролът и диабетът могат да са смесващи фактори. Причинната роля на пушенето е доказана от много проучвания, не от един χ^2.

χ^2 при 2×2, Z-тест и интервал на разликата

Един въпрос, три отговора

- **Z-тест за два дяла** (упр. 4): $\hat{p} = 10{,}2\%$; $Z = 8/\sqrt{10{,}2 \times 89{,}8 \times (1/200 + 1/300)} = 8/2{,}763 = 2{,}90$
- $Z^2 = \chi^2$ ($Z = 2{,}89562...$; $Z^2 = 8{,}3846$) — **същото решение**, същата p-стойност (0,004).
- **95 % CI на разликата** (упр. 3): $\mathrm{SE}_\Delta = \sqrt{15 \times 85/200 + 7 \times 93/300} = 2{,}923$; $8 \pm 1{,}96 \times 2{,}923 \longrightarrow$ **[2,27; 13,73] п.п.** — не съдържа 0.

Какво добавя всеки

- χ^2 работи и за таблици r × c; Z — само за два дяла.
- Интервалът показва **колко голяма** може да е разликата: от 2 до 14 п.п.

Встрани (не е в листа с формули): данните са от кохорта (нови случаи за 10 години), затова отношението на дяловете е относителен риск $\mathrm{RR} = 15/7 = 2{,}14$; отношение на шансовете $\mathrm{OR} = (30 \times 279)/(170 \times 21) = 2{,}34$. OR е по-далеч от 1 от RR, защото инфарктът не е рядък (15 % и 7 %); при малки рискове OR ≈ RR. Те описват силата и посоката на връзката по-ясно от φ и ще се срещнат в епидемиологията.

Добрата практика: χ^2 и p + дяловете по групи + разликата с 95 % CI.

2×2 в проучване случай–контрола: пушене и рак на белия дроб

150 пациенти с рак на белия дроб и 150 контроли без рак от същите болници (без съпоставяне по двойки). Пушили ли са преди поставяне на диагнозата?

O (E)	пушачи	непушачи	общо	% пушачи
рак	120 (90)	30 (60)	150	**80 %**
контроли	60 (90)	90 (60)	150	**40 %**
общо	180	120	300	60 %

- $E_{11} = 150 \times 180/300 = 90$; $|O - E| = 30$
- $\chi^2 = 2 \times 30^2/90 + 2 \times 30^2/60 = 20 + 30 = 50{,}0$
- $\mathrm{df} = 1$; $50{,}0 > 6{,}635 \longrightarrow$ **p < 0,01**

Отхвърляме H_0: пушачите са 80 % от болните с рак на белия дроб и 40 % от контролите; OR = 6.

Какво е различно при случай–контрола

- Броят на болните е **избран** от изследователя (тук половината). Затова „рискът“ при пушачите (120 от 180) няма смисъл — сравняваме **дела на пушачите**: 80 % при болните срещу 40 % при контролите.
- χ^2-тестът е същият. H_0: делът на пушачите е еднакъв при болни и контроли.
- Мярка за силата: $\mathrm{OR} = (120 \times 90)/(60 \times 30) = 6$: шансът за пушене сред болните е 6 пъти по-голям, отколкото сред контролите. RR не може да се изчисли. $\varphi = 0{,}41$ зависи от избраното съотношение случаи : контроли — не я тълкуваме като сила в популацията.

Решен пример от учебника (с. 123–125): пол и придържане към терапията

	ниско	високо	общо
мъже	120 (E 95)	130 (E 155)	250
жени	70 (E 95)	180 (E 155)	250
общо	190	310	500

Клинично изпитване при диабет тип 2. $E_{11} = 250 \times 190/500 = 95$.

- $\chi^2 = 2 \times 25^2/95 + 2 \times 25^2/155 = 13{,}158 + 8{,}065 = 21{,}22$
- $\mathrm{df} = 1$; $21{,}22 > 6{,}635 \longrightarrow$ **p < 0,01** (софтуер: $p \approx 0{,}000004$)
- $\varphi = \sqrt{21{,}22/500} = 0{,}206$

Отхвърляме H_0: има статистически значима връзка между пола и придържането; ниско придържане имат 48 % от мъжете и 28 % от жените (разлика 20 п.п.).

Учебникът определя силата като „слаба към умерена“: 0,206 е близо до границата 0,2 в табл. 24.

СЪДЪРЖАНИЕ

1. Логика на χ^2-теста
2. Таблица 2 × 2
3. **Таблица r × c**
4. Условия, малки очаквани честоти, сила и извод
5. Задачи в час, домашна работа и текуща проверка

Пример 3×3: обучение при диабет и контрол на HbA1c

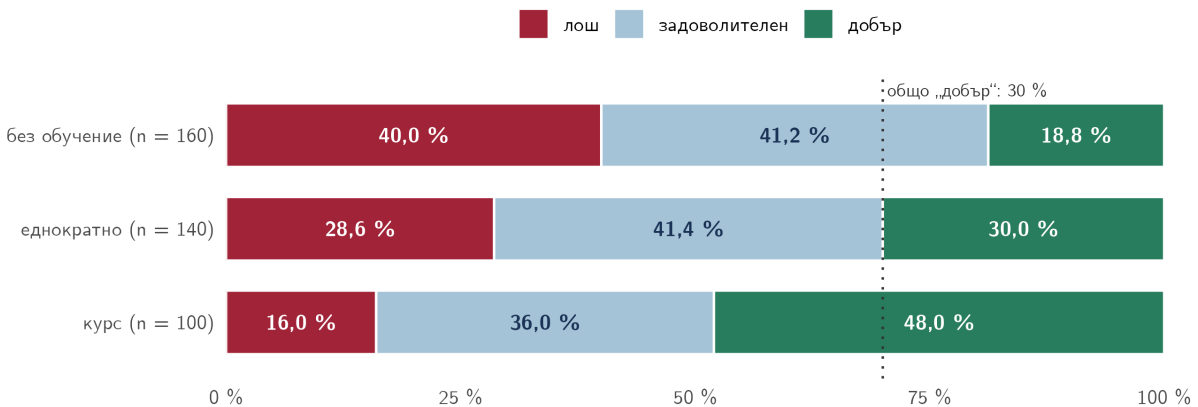
400 пациенти с диабет тип 2, разпределени по участие в обучение и по контрол на HbA1c.

О	лош	задов.	добър	общо
без обучение	64	66	30	160
еднократно	40	58	42	140
курс	16	36	48	100
общо	120	160	120	400

H_0: няма връзка между обучението и контрола на HbA1c; H_1: има връзка.

Делът с добър контрол расте с обучението: 18,8 → 30,0 → 48,0 %

Ако H_0 (независимост) е вярна, трите стълба биха имали еднакво разпределение — 30 / 40 / 30 %



Пример 3×3: очаквани честоти и приноси на клетките

$E_{11} = 160 \times 120/400 = 48$; $E_{12} = 160 \times 160/400 = 64$; $E_{13} = 160 - 48 - 64 = 48$ …

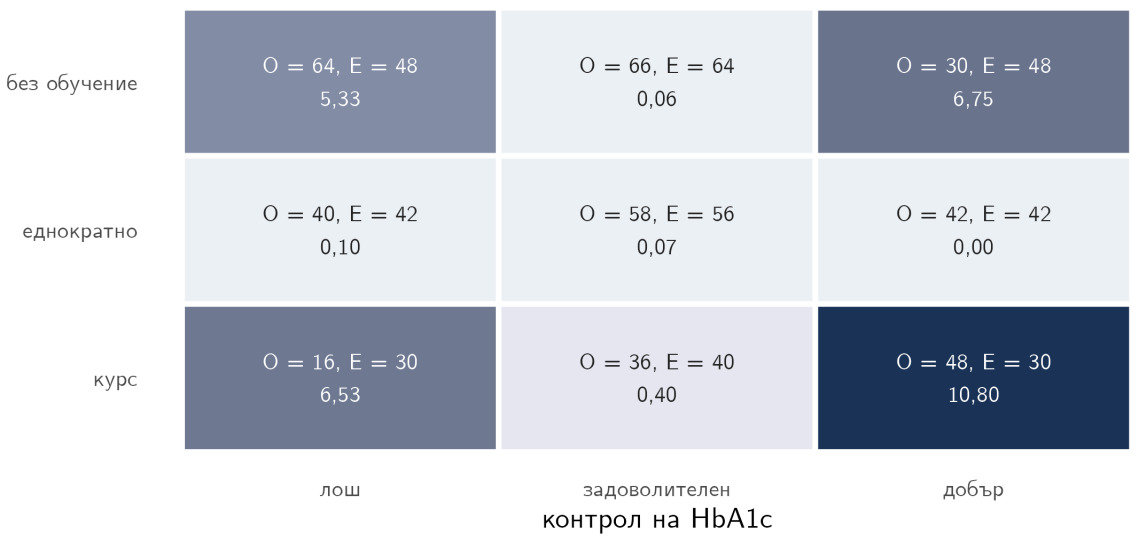
E	лош	задов.	добър
без обучение	48	64	48
еднократно	42	56	42
курс	30	40	30

Всички $E \geq 5$ ✓ (най-малката е 30).

$$\chi^2 = 5{,}333 + 0{,}063 + 6{,}750 + 0{,}095 + 0{,}071 + 0 + 6{,}533 + 0{,}400 + 10{,}800 = \mathbf{30{,}05}$$

Три клетки дават 80 % от $\chi^2 = 30{,}05$

Във всяка клетка: наблюдавана, очаквана честота и принос $(O - E)^2 / E$.
Повече „добър“ при курса и повече „лош“ без обучение, отколкото очаква H_0



Пример 3×3: решение, сила и тълкуване

1. $\mathrm{df} = (3-1)(3-1) = 4$
2. Ред 4: $30{,}05 > 13{,}277 \longrightarrow$ **p < 0,01** (софтуер: $p \approx 0{,}000005$)
3. $V = \sqrt{\chi^2/(n(k-1))} = \sqrt{30{,}05/(400 \times 2)} = 0{,}19$

   $k = \min(R, C) = 3 \longrightarrow$ слаба връзка

Отхвърляме H_0: има статистически значима, слаба връзка между обучението и контрола на HbA1c. Добър контрол имат 18,8 % без обучение, 30,0 % с еднократно обучение и 48,0 % след курс.

Какво казва и какво не казва тестът

- Казва: разпределението на контрола **не е еднакво** в трите групи.
- Не казва **коя** група се различава. Процентите и приносите показват къде са най-големите наблюдавани отклонения; статистически извод за двойки групи изисква отделни сравнения с отчитане на множествеността.
- Не казва, че обучението **подобрява** контрола: по-мотивираните пациенти може и да се записват по-често на курс.

χ^2 не отчита наредбата на категориите (лош < задоволителен < добър). За тренд по наредени категории има специални тестове — извън курса.

Решен пример: физиотерапия и степен на възстановяване

O (E)	незадов.	умерено	пълно	об-що
1 седм. еднократно	65 (54)	70 (66)	15 (30)	150
1 седм. месечно	100 (90)	110 (110)	40 (50)	250
2 седм. месечно	15 (36)	40 (44)	45 (20)	100
общо	180	220	100	500

Пълно възстановяване: **10 %**, **16 %**, **45 %**; при H_0 — по 20 % във всеки ред.

- Приноси: 2,241; 0,242; 7,500; 1,111; 0; 2,000; **12,250**; 0,364; **31,250**
- $\chi^2 = 56{,}96 \approx 57$ (точно 56,958)
- $\mathrm{df} = 4$; $56{,}96 > 13{,}277 \rightarrow$ **p < 0,01**
- $V = \sqrt{56{,}96/(500 \times 2)} = 0{,}24$ — умерена (учебник, табл. 24)

Отхвърляме H_0: има статистически значима, умерена връзка между режима на физиотерапия и степента на възстановяване. Малко над половината от χ^2 (55 %) идва от една клетка: пълно възстановяване при двуседмичния режим (45 срещу очаквани 20).

Същият пример: формулировка и групиране на категориите

Неправилна → правилна формулировка

- H_1 „има **статистически значима** връзка“ → „има връзка в популацията“.
- „Честотата на физиотерапията **е фактор** / **оказва влияние**“ → „е **свързана** със степента на възстановяване“.

Само от кръстосаната таблица и χ^2 не следва причинен извод; той изисква подходящ дизайн (напр. рандомизирано разпределение на режимите) и обосновани допускания.

Изводът зависи от групирането

Таблица	df	χ^2	p
3 × 3 (пълната)	4	56,96	$< 0{,}01$
3 режима × пълно / непълно	2	50,94	$< 0{,}01$
само двата едноседмични режима	2	2,86	$> 0{,}10$

Между двата едноседмични режима не е установена статистически значима разлика; наблюдаваните разлики са главно при двуседмичния режим.

Групирането трябва да има смисъл и да е решено **преди** да видим резултата.

СЪДЪРЖАНИЕ

1. Логика на χ^2-теста
2. Таблица 2 × 2
3. Таблица r × c
4. **Условия, малки очаквани честоти, сила и извод**
5. Задачи в час, домашна работа и текуща проверка

Условия за χ^2-теста

1. **Броеве**, не проценти и не средни.
2. **Независими наблюдения**: всеки човек е в **една** клетка; не се смесват измервания преди и след при едни и същи пациенти.
3. **Очакваните** честоти (не наблюдаваните): поне 80 % от тях ≥ 5 и нито една < 1 (учебник, с. 101).

При таблица 2×2

4 клетки: една клетка под 5 вече е 25 % $\longrightarrow$ условието не е изпълнено. На практика **всички четири** Е трябва да са ≥ 5 (учебник, с. 101: Fisher при очаквана честота < 5 в поне една клетка).

Грешка: χ^2 върху проценти

Ако в примера с физиотерапията вместо броевете се въведат процентите по редове (всеки ред = 100), се получава $\chi^2 = 44{,}76$ вместо 56,96. χ^2 зависи от **n**: при едни и същи проценти и 10 пъти повече хора χ^2 е 10 пъти по-голямо.

Наблюдавана честота 0 или 3 **не нарушава** условието сама по себе си; проверяват се очакваните.

Малки очаквани честоти в 2×2: точен тест на Fisher

Нежелани реакции при два антибиотика, по 15 пациенти с пневмония (както в примера на учебника, с. 102).

	реакция	**без**	**общо**
А	1 (Е 3,5)	14 (Е 11,5)	15
Б	6 (Е 3,5)	9 (Е 11,5)	15
общо	7	23	30

Две от четирите $E < 5$ (50 %) $\longrightarrow$ χ^2-тестът **не е подходящ**.

Метод	**статистика**	**p**
χ^2 (неправилно тук)	4,66	0,031
χ^2 с поправка на Yates*	2,98	0,084
точен тест на Fisher (софтуер)	**—**	**0,080**

По Fisher: p = 0,08 $\longrightarrow$ не отхвърляме H_0: разликата 6,7 % срещу 40 % не е статистически значима. При 15 души в група оценката на разликата е много неточна.

*Поправката на Yates не е в учебника и листа; учебникът препоръчва Fisher. Наивният χ^2 тук дава „значим“ резултат, който не издържа.

Малки очаквани честоти в таблица r × c

Условието е изпълнено

Усложнения при три вида анестезия ($n = 50, 50, 20$): 4, 9 и 2 случая.

E за „усложнение“: 6,25; 6,25; **2,5**. Пет от шест E ≥ 5 (83 %), най-малката ≥ 1 $\longrightarrow$ χ^2 е допустим.

$\chi^2 = 2{,}42$, $\mathrm{df} = 2$ $\longrightarrow$ **p > 0,10**: няма статистически значима връзка.

Условието не е изпълнено — какво правим

1. **Обединяваме** категории, когато това има клиничен смисъл (напр. две сходни оперативни техники) — решено преди анализа.
2. Или използваме **точен тест** (Fisher, със софтуер).
3. Или събираме повече данни.

Обединяването променя въпроса: вече сравняваме обединените групи. Може и да скрие разлика между тях (домашна, задача 3).

Сила на връзката: φ и V на Cramer

$$\varphi = \sqrt{\frac{\chi^2}{n}} \quad (2 \times 2), \quad V = \sqrt{\frac{\chi^2}{n(k-1)}}$$

k — по-малкото от броя на редовете и колоните. И двата са от 0 до 1 и не показват посока (учебник, с. 125). При 2×2 $V = \varphi$.

φ или V	Тълкуване (учебник, табл. 24)
0,1 – 0,2	слаба
0,2 – 0,4	умерена
0,4 – 0,6	силна
0,6 – 0,8	много силна
$>$ 0,8	почти перфектна

Границите са ориентировъчни; таблицата не класифицира стойности между 0 и 0,1, а граничните стойности попадат в два реда.

Значимост ≠ сила

Пушене и инфаркт със **същите проценти** (15 % срещу 7 %), но 10 пъти повече хора:

- n = 500: $\chi^2 = 8{,}38$; p = 0,004; φ = 0,13
- n = 5 000: $\chi^2 = 83{,}85$; p < 0,000001; φ = **0,13**

Малката p-стойност показва, че данните са трудно съвместими с H_0 — тя не е вероятност връзката да съществува и не измерва силата ѝ. Силата се описва с φ / V и с разликата в процентите.

Как се формулира изводът

Шаблон

„$\chi^2 = 30{,}05$; $\mathrm{df} = 4$; $p < 0{,}01$. Отхвърляме H_0 в полза на H_1. Има статистически значима връзка между обучението и контрола на HbA1c ($V = 0{,}19$, слаба). Добър контрол имат 18,8 %, 30,0 % и 48,0 % в трите групи.“

При $p \geq 0{,}05$

„Не отхвърляме H_0: не е установена статистически значима връзка между...“

Неправилни изводи

- „Няма връзка“ (при $p \geq 0{,}05$) — само **не е установена**.
- „Обучението **подобрява** контрола“, „X **е фактор** за Y“.
- „Връзката е **силна**, защото $p < 0{,}001$.“
- „Групата с курс се различава значимо от еднократното обучение“ — χ^2 за 3×3 не сравнява двойки групи.

Чести грешки

Грешка	**Правилно**
χ^2 върху проценти или средни	върху **броеве** в кръстосана таблица
условието проверено по наблюдаваните честоти	по **очакваните**: ≥ 80 % от E ≥ 5, нито една < 1
закръгляне на E до цели числа	E се използват с десетични знаци
$\mathrm{df} = n - 1$ или $R \times C - 1$	$\mathrm{df} = (R-1)(C-1)$
χ^2 при 2×2 с $E < 5$	точен тест на Fisher
едни и същи пациенти преди и след като независими групи	свързани данни — друг тест (извън курса)
„X влияе на Y“, „X е фактор за Y“	„X е **свързано** с Y“
само p-стойност в извода	проценти по групи + φ / V (+ разлика с 95 % CI при 2×2)

Кой тест за качествени променливи?

Въпрос / данни	**Условие**	**Тест**
един дял срещу референтна стойност	$nP_0/100 \geq 10$ и $n(100-P_0)/100 \geq 10$	Z-тест за един дял (упр. 4)
два дяла в две независими групи (2×2)	≥ 10 със и без събитието във всяка група	Z-тест за два дяла **или** χ^2 — едно и също решение ($Z^2 = \chi^2$)
2×2, малки извадки	E < 5 в поне една клетка	точен тест на Fisher
r × c (повече от две категории)	≥ 80 % от E ≥ 5, нито една < 1	χ^2-тест за независимост; иначе обединяване или точен тест
две свързани измервания на качествен признак	едни и същи пациенти	не χ^2 — тест за свързани дялове (извън курса)

Листът с формули: „Качествена, 2 категории $\longrightarrow \chi^2$ / точен тест на Fisher (при дихотомни променливи и малки извадки); $\geq 3 \longrightarrow \chi^2$“.

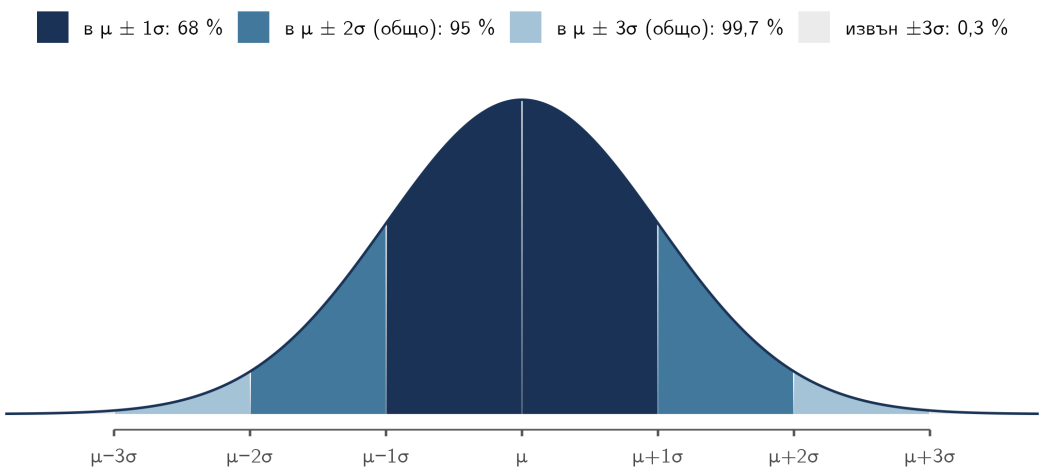
Нормално разпределение

Правило на трите сигми

Правило на трите сигми (учебник, с. 61–62)

Само при нормално разпределение

Пример: тегло 80 ± 10 кг → около 95 % от хората са между 60 и 100 кг



Само при нормално разпределена променлива:

- $\mu \pm 1\sigma$ съдържа ≈ **68 %**
- $\mu \pm 2\sigma$ съдържа ≈ **95 %**
- $\mu \pm 3\sigma$ съдържа ≈ **99,7 %**

Отвъд една граница	дял
над $+1\sigma$ (или под -1σ)	16 %
над $+2\sigma$ (или под -2σ)	2,5 %
над $+3\sigma$ (или под -3σ)	0,15 %

Опашките са симетрични: $(100 - 68)/2 = 16$. Точните стойности: 68,27; 95,45; 99,73 %. Точно 95 % дава $\pm 1{,}96\sigma$. В задачите — $\overline{X}$ и S на извадката.

Как се решава задача с правилото на трите сигми

1. Проверете дали променливата е **нормално разпределена** (обикновено е казано в условието). Ако не е — правилото **не се прилага**.
2. Начертайте кривата; отбележете $\overline{X}$, $\overline{X} \pm S$, $\overline{X} \pm 2S$, $\overline{X} \pm 3S$.
3. Превърнете границите от условието в брой стандартни отклонения: $\left(x - \overline{X}\right)/S$.
4. Съберете или извадете съответните дялове; умножете по n.

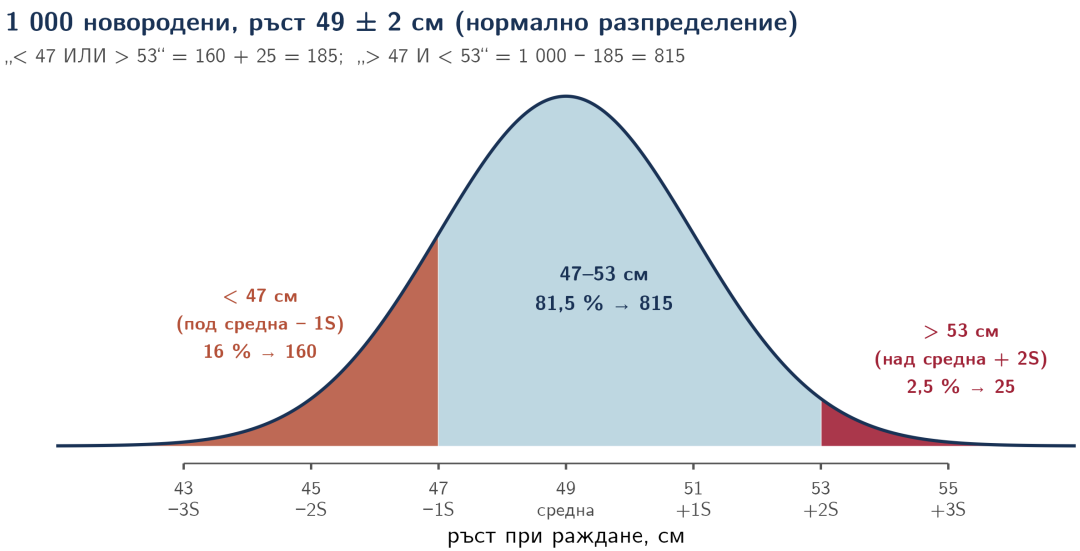
Логически оператори

- **ИЛИ** — поне едно от условията: **събираме** опашките.
  „< 47 **или** > 53 см“ $= 16\ \% + 2{,}5\ \%$.
- **И** — всички условия едновременно: **сечение**.
  „> 47 **и** < 53 см“ $= 100 - 16 - 2{,}5\ \%$.

Капани

- „> 53 **и** < 47“ — невъзможно $\longrightarrow 0$.
- „> 47 **или** < 53“ — всеки отговаря $\longrightarrow$ всички.

Решен пример: 1 000 новородени, ръст 49 ± 2 см



$47 = 49 - 1 \times 2$ $(-1S)$; $53 = 49 + 2 \times 2$ $(+2S)$

Въпрос	Отговор
$>$ 53 **или** $<$ 47 см	160 + 25 = **185**
$>$ 53 **и** $<$ 47 см	**0** (невъзможно)
$>$ 47 **и** $<$ 53 см	1 000 − 185 = **815**
$>$ 47 **или** $<$ 53 см	**всички 1 000**

Очаквани бройки по нормалното разпределение: 181 и 819 — правилото е приближение.

Ако ръстът не е нормално разпределен

Правилото не се прилага и от средната и S броят не може да се определи. Отговорът „0 новородени“ е грешен — той не следва от данните.

Референтни граници и отклоняващи се стойности

Референтен интервал

При нормално разпределение около 95 % от здравите са в $\overline{X} \pm 2S$ (по-точно $\pm 1{,}96S$). Затова лабораторните „норми“ често са граници, **извън** които попадат около 5 % от **здравите** хора — стойност извън тях не означава автоматично болест.

Отклоняващи се стойности

Стойност отвъд $\overline{X} \pm 3S$ се среща в около 3 на 1 000 случая $\longrightarrow$ проверка за грешка при измерването или въвеждането, или за друга популация.

Не бъркайте

- $\overline{X} \pm 2S$ — къде са **индивидите** (около 95 %).
- $\overline{X} \pm t \times S/\sqrt{n}$ — 95 % CI за **средната** (упр. 2; t от таблицата, при голямо $n \approx 1{,}96$). Той е много по-тесен.

При изтеглени разпределения (CRP, болничен престой, доходи) правилото дава безсмислени граници — напр. отрицателни стойности. Там се използват перцентили и правилото $1{,}5 \times \mathrm{IQR}$ (упр. 2).

СЪДЪРЖАНИЕ

1. Логика на χ^2-теста
2. Таблица 2 × 2
3. Таблица r × c
4. Условия, малки очаквани честоти, сила и извод
5. **Задачи в час, домашна работа и текуща проверка**

Задачи в час

А · Множествена склероза (χ^2 2×2)

Рецидив до 6 месеца: **25 от 200** на експериментална и **45 от 200** на конвенционална терапия (задачата от упр. 4).

1. Съставете таблица 2×2, изчислете E и χ^2.
2. Сравнете с $Z = -2{,}63$ от упр. 4.
3. Изчислете φ и формулирайте извод.

Б · Източник на здравна информация (3×3)

	лекар	близки	интернет
18–39	18	42	60
40–64	27	33	30
65+	45	25	20

Има ли връзка между възрастта и основния източник на здравна информация? Изчислете χ^2, df, V.

В · Правило на трите сигми

Ръст на 800 седемгодишни деца: $\overline{X} = 122$ см, $S = 5$ см, нормално разпределение. Колко деца имат ръст:

1. между 117 и 127 см;
2. над 132 см;
3. под 112 **или** над 127 см;
4. над 112 **и** под 127 см?

Решения

А. E: 35 и 165 във всеки ред.
$\chi^2 = 2(10^2/35) + 2(10^2/165) = 5{,}714 + 1{,}212 = 6{,}93$; df $= 1$
$6{,}93 > 6{,}635 \rightarrow$ **p < 0,01** (0,008)
$Z^2 = \chi^2$ ✓ ($Z = -2{,}63181\ldots$; $Z^2 = 6{,}926$); $\varphi = \sqrt{6{,}93/400} = 0{,}13$

Рецидивите са статистически значимо по-редки при експерименталната терапия (12,5 % срещу 22,5 %); слаба връзка.

Б. Редове 120, 90, 90; колони 90, 100, 110.
$E_{11} = 120 \times 90/300 = 36$ …
Най-големи приноси: 65+/лекар **12,0**; 18–39/лекар **9,0**; 18–39/интернет **5,8**; 65+/интернет **5,1**.
$\chi^2 = 33{,}45$; df $= 4$; $33{,}45 > 13{,}277 \rightarrow$ **p < 0,01**
$V = \sqrt{33{,}45/600} = 0{,}24$ — умерена

Има връзка: 50 % от 18–39 г. ползват основно интернет, 50 % от 65+ — лекаря.

В. $117 = -1S$; $127 = +1S$; $132 = +2S$; $112 = -2S$.

1. 68 % → **544**
2. 2,5 % → **20**
3. 2,5 % + 16 % = 18,5 % → **148**
4. 100 − 2,5 − 16 = 81,5 % → **652**

Очаквани бройки по нормалното разпределение: 546, 18, 145, 655.

Обобщение и домашна работа

Да запомним

1. χ^2: връзка между две **качествени** променливи; $E = R \times C/n$; $\mathrm{df} = (R-1)(C-1)$.
2. Условие по **очакваните** честоти; при 2×2 с E < 5 — Fisher; при r×c — обединяване или точен тест.
3. При 2×2 $\chi^2 = Z^2$; добавете разликата с 95 % CI.
4. Сила: φ (2×2), V (r×c); значимост ≠ сила; връзка ≠ причина.
5. Три сигми: 68 – 95 – 99,7 %; опашки 16 – 2,5 – 0,15 %; **само** при нормално разпределение.

Домашна работа

Четири задачи — на сайта, „Медицинска статистика“: **kostadinoff.github.io**

- χ^2 2×2 и r×c
- малки очаквани честоти
- правило на трите сигми

Следващия път: **корелация и регресия**. В края — текуща проверка (1 т.) по **χ^2-тест**.

Текуща проверка (1 точка): t-тест и Z-тест

Правила

- **15 минути**, самостоятелно
- един казус на човек; съседите имат **различни** варианти
- позволени: калкулатор и лист с формули
- напишете име, факултетен номер и група
- двустранна проверка, $\alpha = 0{,}05$

Какво се оценява

1. дялове / средни и разлика Δ
2. H_0 и H_1 за популацията
3. обединен дял (Z) или стандартна грешка (t)
4. Z или t (и df)
5. **p-стойност** от листа и **заключение** с думи

Благодаря за вниманието!